

**МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛИПЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ П.П. СЕМЕНОВА-ТЯН-ШАНСКОГО»
(ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)**



УТВЕРЖДАЮ
Ректор ФГБОУ ВО
«ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского»

Н.В. Федина
«27» апреля 2023 г.

**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ
«ОСНОВЫ АЛГЕБРЫ, ГЕОМЕТРИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»**

Липецк – 2023

Цель вступительного испытания: определить уровень математической подготовки абитуриентов.

Задачи вступительного испытания: оценить уровень сформированности математических знаний абитуриента и умений применять их при решении математических задач.

Поступающий в должен:

знать: основные математические понятия, факты и методы, в соответствии с программой средней школы;

уметь: самостоятельно решать математические задачи, проводя необходимые вычисления и рассуждения; грамотно излагать полученные результаты;

владеть: навыками практического использования основных математических понятий, фактов и методов при решении различных задач.

Максимальный балл - 100 баллов.

Минимальный положительный балл - 39 баллов.

Содержание программы

Программа по математике для поступающих в ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского состоит из следующих разделов:

- 1) основные математические понятия и факты - представляет собой полный перечень математических понятий и фактов, которыми должен владеть поступающий;
- 2) основные формулы и теоремы - содержит основные утверждения и теоремы, используемые при решении задач вступительного экзамена по математике;
- 3) содержание разделов - описывает наполняемость каждого из разделов;
- 4) литература - включает наименования пособий, которые могут быть использованы при подготовке к вступительному испытанию;
- 5) инструкция по выполнению работы;
- 6) примерный вариант письменной работы по математике;
- 7) система оценивания письменной экзаменационной работы по математике.

I. Основные математические понятия и факты

Арифметика, алгебра и начала анализа

1. Натуральные числа (N). Простые и составные числа. Делитель, кратное. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное.
2. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.
3. Целые числа (Z). Рациональные числа (Q), их сложение, вычитание, умножение и деление. Сравнение рациональных чисел.
4. Действительные числа (R), их представление в виде десятичных дробей.
5. Изображение чисел на прямой. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.
6. Числовые выражения, выражения с переменными. Формулы сокращенного умножения.
7. Степень с натуральным и рациональным показателем. Арифметический корень.
8. Логарифмы и их свойства.
9. Одночлен и многочлен.
10. Многочлен с одной переменной. Корень многочлена на примере квадратного трехчлена.
11. Понятие функции. Способы задания функции. Область определения, множество значений функции.
12. График функции. Возрастание и убывание функции, периодичность, четность, нечетность.
13. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма). Достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке.
14. Определения и основные свойства функций:
 - а) линейной $y = ax + b$,
 - б) квадратичной $y = ax^2 + bx + c$,
 - в) степенной $y = ax^n$ ($n \in N$), $y = \frac{1}{x^k}$,
 - г) показательной $y = a^x$ ($a > 0$),
 - д) логарифмической $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$),
 - е) тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$,
 - ж) арифметического корня $y = \sqrt[n]{x}$.
15. Уравнение. Корни уравнения. Понятие о равносильных уравнениях.

16. Неравенства. Решения неравенства. Понятие о равносильных неравенствах.
17. Система уравнений и неравенств. Решения системы.
18. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формулы n -го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии. Формулы n -го члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии.
19. Синус и косинус суммы и разности двух аргументов (формулы).
20. Преобразование в произведение выражений $\sin a \pm \sin P$, $\cos a \pm \cos P$.
21. Определение производной. Ее физический и геометрический смысл.
22. Производные функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = x^n$, $y = a^x$, $y = \ln x$, $Y = {}^{\log} ga^x$.
23. Производная суммы, произведения, частного двух функций, производная сложной функции.
24. Статистические характеристики.
25. Понятие вероятности. Простейшие комбинаторные комбинации.

Геометрия

1. Прямая, луч, отрезок, ломаная. Длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые.
2. Примеры преобразования фигур, виды симметрий. Преобразование подобия и его свойства.
3. Векторы. Операции над векторами.
4. Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали.
5. Треугольник. Его медиана, биссектриса, высота. Виды треугольников. Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника.
6. Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция.
7. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности. Дуга окружности. Сектор.
8. Центральные и вписанные углы.
9. Формулы площади: треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции.
10. Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь сектора.
11. Подобие. Подобные фигуры, отношение площадей подобных фигур.
12. Плоскость. Параллельные и пересекающиеся плоскости.
13. Параллельность прямой и плоскости.
14. Угол между прямой и плоскостью. Перпендикуляр к плоскости.

15. Двугранные углы. Линейный угол двугранного угла. Перпендикулярность двух плоскостей.

16. Многогранники. Их вершины, ребра, грани, диагонали. Прямая и наклонная призмы, пирамиды. Правильная призма и правильная пирамида. Параллелепипеды, их виды.

17. Фигуры вращения: цилиндр, конус, сфера, шар. Центр, диаметр, радиус сферы и шара. Плоскость, касательная к сфере.

18. Формула объема параллелепипеда.

19. Формулы площади поверхности и объема призмы.

20. Формулы площади поверхности и объема пирамиды.

21. Формулы площади поверхности и объема цилиндра.

22. Формулы площади поверхности и объема конуса.

23. Формула объема шара.

24. Формула площади сферы

II. Основные формулы и теоремы

Алгебра и начала анализа

1. Свойства функции $y = ax + b$ и ее график.

2. Свойства функции $y = \frac{k}{x}$ и ее график.

3. Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ и ее график.

4. Формула корней квадратного уравнения.

5. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.

6. Свойства числовых неравенств.

7. Логарифм произведения, степени, частного.

8. Определение и свойства функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ и их графики.

9. Определение и свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и ее график.

10. Решение уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

11. Формулы приведения.

12. Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

13. Тригонометрические функции двойного аргумента.

14. Формула вероятности. Комбинаторные формулы.

Геометрия

1. Свойства равнобедренного треугольника.
2. Свойства точек, равноудаленных от концов отрезка.
3. Признаки параллельности прямых.
4. Сумма углов треугольника. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.
5. Признаки параллелограмма, его свойства.
6. Окружность, описанная около треугольника.
7. Окружность, вписанная в треугольник.
8. Касательная к окружности и ее свойство.
9. Величина угла, вписанного в окружность.
10. Признаки подобия треугольников.
11. Теорема Пифагора.
12. Формулы площадей параллелограмма, треугольника, трапеции.
13. Формула расстояния между двумя точками плоскости. Уравнение окружности.
14. Признак параллельности прямой и плоскости.
15. Признак параллельности плоскостей.
16. Теорема о перпендикулярности прямой и плоскости.
17. Перпендикулярность двух плоскостей.
18. Теоремы о параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
19. Теорема о трех перпендикулярах.

III. Содержание разделов программы

1. Алгебра

Числа, корни и степени. Целые числа. Степень с натуральным показателем. Дроби, проценты, рациональные числа. Степень с целым показателем. Корень степени $n > 1$ и его свойства. Степень с рациональным показателем и её свойства. Свойства степени с действительным показателем.

Основы тригонометрии. Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла. Радианная мера угла. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа. Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов. Синус и косинус двойного угла.

Логарифмы. Логарифм числа. Логарифм произведения, частного, степени. Десятичный и натуральный логарифмы, число e .

Преобразования выражений. Преобразования выражений, включающих арифметические операции. Преобразования выражений, включающих операцию возведения

в степень. Преобразования выражений, включающих корни натуральной степени. Преобразования тригонометрических выражений. Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования. Модуль (абсолютная величина) числа.

Требования к уровню освоения содержания раздела: Абитуриент должен уметь: выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма; вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования; проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.

2. Уравнения и неравенства

Уравнения. Квадратные уравнения. Рациональные уравнения. Иррациональные уравнения. Тригонометрические уравнения. Показательные уравнения. Логарифмические уравнения. Равносильность уравнений, систем уравнений. Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными. Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных. Использование свойств и графиков функций при решении уравнений. Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.

Неравенства. Квадратные неравенства. Рациональные неравенства. Показательные неравенства. Логарифмические неравенства. Системы линейных неравенств. Системы неравенств с одной переменной. Равносильность неравенств, систем неравенств. Использование свойств и графиков функций при решении неравенств. Метод интервалов. Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем.

Требования к уровню освоения содержания раздела: Абитуриент должен уметь: решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы; решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод; решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы; моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

3. Функции

Определение и график функции. Функция, область определения функции. Множество значений функции. График функции. Обратная функция. График обратной функции. Преобразования графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат.

Элементарное исследование функций. Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания. Чётность и нечётность функции. Периодичность функции. Ограниченность функции. Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Основные элементарные функции. Линейная функция, её график. Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график. Квадратичная функция, её график. Степенная функция с натуральным показателем, её график. Тригонометрические функции, их графики. Показательная функция, её график. Логарифмическая функция, её график.

Требования к уровню освоения содержания раздела: Абитуриент должен уметь: определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции; описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках.

4. Начала математического анализа.

Производная. Понятие о производной функции, геометрический смысл производной. Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком. Уравнение касательной к графику функции. Производные суммы, разности, произведения, частного. Производные основных элементарных функций. Вторая производная и её физический смысл.

Исследование функций. Применение производной к исследованию функций и построению графиков. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах.

Первообразная и интеграл. Первообразные элементарных функций.

Требования к уровню освоения содержания раздела:

Абитуриент должен уметь: находить производную функции; решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и

наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения; вычислять производные и первообразные элементарных функций.

5. Геометрия

Планиметрия. Треугольник. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат. Трапеция. Окружность и круг. Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника. Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника. Правильные многоугольники. Вписанная окружность и описанная окружность правильного многоугольника.

Прямые и плоскости в пространстве. Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые; перпендикулярность прямых. Параллельность прямой и плоскости, признаки и свойства. Параллельность плоскостей, признаки и свойства. Перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства; перпендикуляр и наклонная; теорема о трёх перпендикулярах. Перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства. Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур.

Многогранники. Призма, её основания, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма. Параллелепипед; куб; симметрии в кубе, в параллелепипеде. Пирамида, её основание, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида. Сечения куба, призмы, пирамиды. Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр). Тела и поверхности вращения. Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. Шар и сфера, их сечения.

Измерение геометрических величин. Величина угла, градусная мера угла, соотношение между величиной угла и длиной дуги окружности. Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника. Расстояние от точки до прямой. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора. Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы. Объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара.

Координаты и векторы. Координаты на прямой, декартовы координаты на плоскости и в пространстве. Формула расстояния между двумя точками. Вектор, модуль вектора, равенство векторов; сложение векторов и умножение вектора на число. Коллинеарные векторы. Компланарные векторы. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами.

Требования к уровню освоения содержания раздела:

Абитуриент должен уметь: решать планиметрические задачи на нахождение

геометрических величин (длин, углов, площадей); решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы; определять координаты точки; проводить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами.

6. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей.

Элементы комбинаторики. Поочередный и одновременный выбор. Формулы числа сочетаний и перестановок.

Элементы статистики. Табличное и графическое представление данных. Числовые характеристики рядов данных.

Элементы теории вероятностей. Вероятности событий.

Требования к уровню освоения содержания раздела: Абитуриент должен уметь: моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий.

IV. Литература

Основная литература:

1. Школьные учебники по математике.
2. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И.. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень) // М.: Мнемозина.
3. Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Ткачева М.В. и др. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень) // М.: Мнемозина.
4. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень) // М.: Мнемозина.
5. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия (базовый и профильный уровни) // М.: Просвещение.
6. Погорелов А.В. Геометрия (базовый и профильный уровни) // М.: Просвещение.
7. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко.- М.: Издательство «Национальное образование», 2022.

Дополнительная литература:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник // М.: Академия, 2002.
2. Крамор В.С. Математика. Учебное пособие. Готовимся к экзамену по математике // М.: Оникс, 2008.
3. Никольский С.М., Потапов М.К. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровень) // М.: Просвещение.

4. Лаппо Л.Д., Попов М.А. ЕГЭ 2022. Математика. 40 тренировочных вариантов ЕГЭ и теоретический справочник. М.: «Экзамен», 2022.

5. Лаппо Л.Д., Попов М.А. ЕГЭ 2022. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Самостоятельная подготовка в ЕГЭ. М.: «Экзамен», 2022.

Интернет-ресурсы:

1. Федеральный институт педагогических измерений <https://fipi.ru/>.
2. Официальный информационный портал единого государственного экзамена <https://obrnadzor.gov.ru/gia/gia-11/>.
3. <https://ege.sdamgia.ru/>. На данном сайте представлены все прототипы задач школьного курса математики, входящих в КИМ ЕГЭ.
4. <https://alexlarin.net/>. На данном сайте представлены тренировочные варианты Единого государственного экзамена текущего года и предыдущих лет.

V. Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

Экзаменационная работа проводится в письменной форме, на русском языке.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными или синими чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

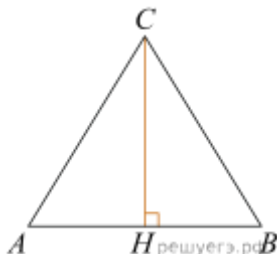
Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов был записан под правильным номером.

VI. Примерный вариант письменной работы по математике

Вариант сформирован на сайте Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ» (<https://math-ege.sdamgia.ru>).

1. В треугольнике ABC $AB = BC = AC = 2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH .

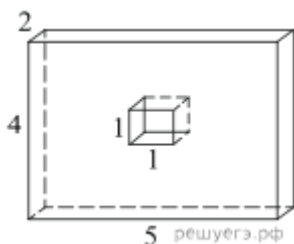


Решение. Треугольник ABC – равносторонний, значит, все углы в треугольнике равны 60° .

$$CH = AC \sin A = 2\sqrt{3} \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$

Ответ: 3.

2. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Решение. Площадь поверхности заданного многогранника равна сумме площадей большого и маленького параллелепипедов с ребрами 2, 4, 5 и 1, 1, 2, уменьшенной на 4 площади прямоугольника со сторонами 1, 1 — передней грани маленького параллелепипеда, излишне учтенной при вычислении площадей поверхностей параллелепипедов:

$$S = 2(5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2) + 2(2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) - 4(1 \cdot 1) = 76 + 10 - 4 = 82.$$

Ответ: 82.

3. В группе туристов 20 человек. Их вертолётom в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 5 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист Ф. полетит вторым рейсом вертолётa.

Решение. На втором рейсе 5 мест, всего туристов 20. Тогда вероятность того, что турист Ф. полетит вторым рейсом вертолётa, равна:

$$\frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

4. Вероятность того, что на тестировании по биологии учащийся П. верно решит больше 9 задач, равна 0,59. Вероятность того, что П. верно решит больше 8 задач, равна 0,65. Найдите вероятность того, что П. верно решит ровно 9 задач.

Решение. Рассмотрим события A = «учащийся решит 9 задач» и B = «учащийся решит больше 9 задач». Их сумма — событие $A + B$ = «учащийся решит больше 8 задач». События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Тогда, используя данные задачи, получаем: $0,65 = P(A) + 0,59$, откуда $P(A) = 0,65 - 0,59 = 0,06$.

Ответ: 0,06.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{64 - 3x} = 7$.

Решение. ОДЗ: $64 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{64}{3}$

$$\begin{aligned} \sqrt{64 - 3x} = 7 &\Leftrightarrow 64 - 3x = 49 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3x = 49 - 64 &\Leftrightarrow -3x = -15 \Leftrightarrow x = 5 \end{aligned}$$

Ответ: 5.

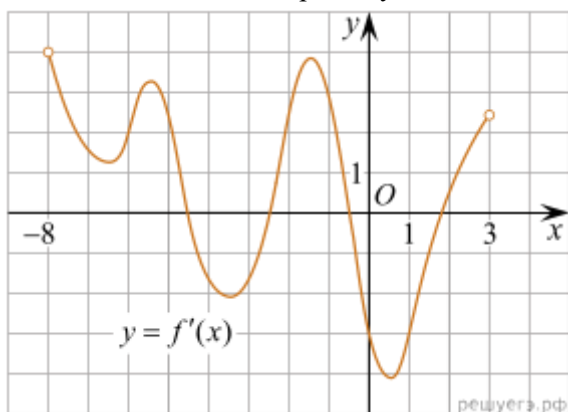
6. Найдите значение выражения $\sqrt{50} \cos^2 \frac{3\pi}{8} - \sqrt{50} \sin^2 \frac{3\pi}{8}$.

Решение. Используем формулу косинуса двойного угла $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$:

$$\begin{aligned} \sqrt{50} \cos^2 \frac{3\pi}{8} - \sqrt{50} \sin^2 \frac{3\pi}{8} &= \sqrt{50} \cos \frac{3\pi}{4} = \\ &= \sqrt{50} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{10}{2} = -5. \end{aligned}$$

Ответ: -5.

7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



Решение. Промежутки возрастания данной функции $f(x)$ соответствуют промежуткам, на которых ее производная положительна, то есть интервалам $(-8; -4)$, $(-2, 5; -0, 5)$ и $(1, 8; 3)$. Данные интервалы содержат целые точки $-7, -6, -5, -2, -1, 2$. Их сумма равна -19 .

Ответ: -19.

8. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 15$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 120$ км/ч². Расстояние от

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением

где t — время в часах. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет

находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 45 км от города. Ответ выразите в минутах.

Решение. Мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если $S \leq 45$ км. Задача сводится к нахождению наибольшего решения неравенства $S \leq 45$ км при заданных значениях параметров U_0 и a :

$$\begin{aligned} S \leq 45 &\Leftrightarrow 60t^2 + 15t \leq 45 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 60t^2 + 15t - 45 \leq 0 \Leftrightarrow 4t^2 + t - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{-1 - \sqrt{49}}{8} \leq t \leq \frac{-1 + \sqrt{49}}{8} \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 0,75 \end{aligned}$$

Учитывая то, что время — неотрицательная величина, получаем $t \leq 0,75$ ч, то есть $t \leq 45$ мин.

Ответ: 45.

9. Имеются два сосуда. Первый содержит 30 кг, а второй — 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Решение. Пусть концентрация первого раствора кислоты — c_1 , а концентрация второго — c_2 . Если смешать эти растворы кислоты, то получится раствор, содержащий 68% кислоты: $30c_1 + 20c_2 = 50 \cdot 0,68$. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты: $mc_1 + mc_2 = 2m \cdot 0,7$. Решим полученную систему уравнений:

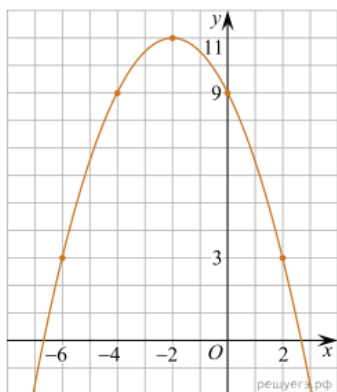
$$\begin{aligned} \begin{cases} c_1 + c_2 = 1,4, \\ 30c_1 + 20c_2 = 34 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 1,4 - c_1, \\ 30c_1 + 28 - 20c_1 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 1,4 - c_1, \\ 10c_1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 0,8, \\ c_1 = 0,6. \end{cases} \end{aligned}$$

Поэтому $m_1 = 0,6 \cdot 30 = 18$.

Ответ: 18.

$$f(x) = \frac{x^2}{a} + bx + c,$$

10. На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{x^2}{a} + bx + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите значение $f(4)$.



Решение. По рисунку определяем, что $f(x) = -\frac{(x+2)^2}{2} + 11 = -\frac{x^2}{2} - 2x + 9$, значит, $a = -2$, $b = -2$, $c = 9$.

Тогда $f(4) = -\frac{(4+2)^2}{2} + 11 = -18 + 11 = -7$.

11. Найдите наименьшее значение функции $y = 7 \sin x - 8x + 9$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Решение. Найдем производную заданной функции: $y' = 7 \cos x - 8$. Найденная производная отрицательна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является убывающей. Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является

$$y(0) = 7 \sin 0 - 8 \cdot 0 + 9 = 9.$$

Ответ: 9.

12. а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin(-x) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение. В силу нечетности синуса $\sin(-x) = -\sin x$, по формуле двойного угла $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$, откуда получаем:

$$\cos 2x + \sin(-x) - 1 = 1 - 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$$

Разность между соседними членами в первой серии равна π , поэтому на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ длиной $1,5\pi$ может лежать не более двух членов серии. Это числа π и 2π . Для двух других серий разность между соседними членами равна 2π , поэтому из каждой их них в отрезок может попасть не более

одного члена. Эти члены суть $\frac{7\pi}{6}$ и $\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{ \pi k, \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \frac{11\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi$.

Критерии проверки:

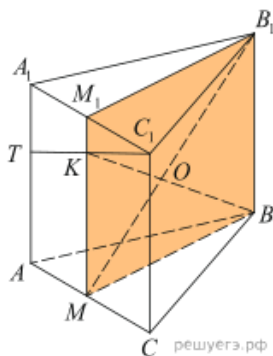
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов	1

решения пункта а) и пункта б).	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

13. Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания $AB=4$, а боковое ребро $AA_1=9$. Точка M — середина ребра AC , а на ребре AA_1 взята точка T так, что $AT=5$.

а) Докажите, что плоскость BB_1M делит отрезок C_1T пополам.

б) Плоскость BTC_1 делит отрезок MB_1 на две части. Найдите длину меньшей из них.



Решение. а) Пусть точка M_1 — середина A_1C_1 . Очевидно, $M_1 \in BB_1M$. Проведем MM_1 . Это прямая, содержащая среднюю линию треугольника TA_1C_1 , так как $MM_1 \parallel AA_1$ и проходит через середину A_1C_1 . Значит, она проходит и через середину TC_1 .

б) Обозначим середину TC_1 — K . Рассмотрим плоскость BB_1M_1M . Отрезок BK лежит в ней и в плоскости BTC_1 , поэтому надо узнать, как отрезок BK делит отрезок B_1M — диагональ

$$BB_1 = 9, BM = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

прямоугольника BB_1M_1M со

сторонами

При

$$M_1K = \frac{A_1T}{2} = 2.$$

этом

Пусть O точка пересечения BK и B_1M . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{B_1O}{OM} &= \frac{S_{B_1BO}}{S_{BOM}} = \frac{B_1B \cdot BO \cdot \sin \angle B_1BO}{MB \cdot BO \cdot \sin \angle MBO} = \\ &= \frac{9 \cdot \cos \angle MBO}{2\sqrt{3} \cdot \sin \angle MBO} = \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \angle MBO = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{MB}{MK} = \frac{9}{7}. \end{aligned}$$

$$\text{Поэтому } OM = \frac{7}{16} B_1M = \frac{7}{16} \sqrt{93}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{7}{16} \sqrt{93}.$$

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3

Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

14. Решите неравенство: $\log_x(x^3 - 1) \leq \log_x(x^3 + 3x - 7)$.

Решение. По смыслу задачи $x > 1$. Тогда:

$$\begin{aligned} \log_x(x^3 - 1) &\leq \log_x(x^3 + 3x - 7) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 1 \leq x^3 + 3x - 7, \\ x > 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 6, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2. \end{aligned}$$

Ответ: $[2; +\infty)$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15. По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 15 млн рублей в первый и второй годы, а также по 10 млн в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором общая сумма средств вкладчика к началу третьего года станет больше 110 млн, а к концу проекта — больше 190 млн рублей.

Решение. Пусть S млн — первоначальные вложения. К началу 2-го года получится $1,2S + 15$ млн, а к началу 3-го года — $1,2(1,2S + 15) + 15 = 1,44S + 33$. По условию $1,44S + 33 > 110$,

$$S > \frac{77}{1,44} = 53,4\dots$$

откуда

К началу 4-го года имеем $1,2(1,44S + 33) + 10$, а в конце проекта:

$$1,2(1,2(1,44S + 33) + 10) + 10 = 2,0736S + 47,52 + 22 = 2,0736S + 69,52.$$

$$\text{По условию } 2,0736S + 69,52 > 190, \text{ откуда } S > \frac{120,48}{2,0736} = 58,1\dots$$

А значит, минимальное возможное целое значение: $S = 59$.

Ответ: 59 млн. рублей.

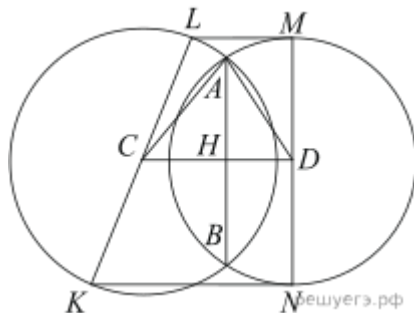
Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16. Дана трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружности, построенные на боковых сторонах KL и MN как на диаметрах, пересекаются в точках A и B .

а) Докажите, что средняя линия трапеции лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB .

б) Найдите AB , если известно, что боковые стороны трапеции равны 14 и 30, а средняя линия трапеции равна 20.



Решение. а) Пусть C и D — центры окружностей с диаметрами KL и MN соответственно. Тогда C и D — середины боковых сторон трапеции, значит, CD — средняя линия трапеции. Линия центров CD пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам, следовательно, CD — серединный перпендикуляр к отрезку AB .

б) Пусть H — середина AB . Тогда AH — высота треугольника CAD со сторонами

$$CD = 20, AC = \frac{1}{2}KL = 15, AD = \frac{1}{2}MN = 7.$$

Пусть p — полупериметр треугольника CAD , S — площадь треугольника. Тогда

$$p = \frac{7 + 15 + 20}{2} = 21,$$

$$S = \sqrt{p(p-7)(p-15)(p-20)} = \sqrt{21 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 1} = 42.$$

Значит,

$$AH = \frac{2S}{CD} = \frac{2 \cdot 42}{20} = \frac{2 \cdot 21}{10} = 4,2.$$

Следовательно, $AB = 2AH = 8,4$.

Ответ: б) 8,4.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b и использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 2a + 3)^2 + (y - a)^2 = 2,25, \\ (x + 3)^2 + (y - a)^2 = a^2 + 2a + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют первому уравнению — окружность с центром в точке $(2a - 3; a)$ и радиусом 1,5. Второму уравнению — окружность с центром в точке $(-3; a)$ и радиусом $\sqrt{a^2 + 2a + 1} = |a + 1|$ (возможно, эта окружность вырождается в точку, если $a = -1$. Тогда эта точка имеет координаты $(-3; -1)$ и на первой окружности не лежит). Система будет иметь единственное решение, если эти окружности касаются друг друга, то есть расстояние между их центрами будет равно сумме или разности радиусов.

Итак,

$$|2a| = 1,5 + |a + 1|, \quad |2a| = 1,5 - |a + 1| \text{ или } |2a| = |a + 1| - 1,5.$$

При $a > 0$ эти уравнения превращаются соответственно в $2a = a + 2,5$, $2a = 0,5 - a$,

$$2a = a - 0,5, \text{ откуда } a = \frac{5}{2}, a = \frac{1}{6}.$$

Последнее уравнение не имеет положительных корней.

При $a \in [-1; 0]$ эти уравнения превращаются соответственно в $-2a = a + 2,5$,
 $-2a = 0,5 - a$, $-2a = a - 0,5$, откуда $a = -\frac{1}{2}$, $a = -\frac{5}{6}$. Последнее уравнение не имеет
 корней на данном промежутке.

При $a < -1$ эти уравнения превращаются соответственно в $-2a = -a + 0,5$, $-2a = 2,5 + a$, $-2a = -a - 2,5$, все они корней на данном промежутке не имеют.

Ответ: $a = \frac{5}{2}$, $a = \frac{1}{6}$, $a = -\frac{1}{2}$, $a = -\frac{5}{6}$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

18. В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писали 50 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

- а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 2 раза?
 б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 2%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 2%. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 9?
 в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 2%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 2%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

Решение. а) Пусть в школе № 1 писали тест два учащихся, один из них набрал 1 балл, а второй набрал 3 балла и перешёл в школу № 2. Тогда средний балл в школе № 1 уменьшился в 2 раза.

б) Пусть в школе № 2 писали тест m учащихся, средний балл равнялся B , а перешедший в неё учащийся набрал u баллов. Тогда получаем:

$$u = 0,98(m+1)B - mB; 50u = (49 - m)B.$$

Если $B=9$, то $(49 - m)B$ не делится на 50, а $50u$ делится на 50. Но это невозможно, поскольку $50u = (49 - m)B$.

- в) Пусть в школе № 1 средний балл равнялся A . Тогда получаем:

$$u = (50 - m)A - 0,98(49 - m)A; 50u = (99 - m)A = (49 - m)B.$$

Заметим, что если $B=1$ или $B=3$, то $50u = (49 - m)B$ не делится на 50. Если $B=5$, то $m=9, m=19, m=29$ и $m=39$. Тогда соответственно получаем: $90A=200, 80A=150, 70A=100, 60A=50$. Ни один из этих случаев не возможен. Если $B=2$ или $B=4$, то $m=24$. В первом случае $75A=50$, а во втором $75A=100$. Значит, ни один из этих случаев не возможен.

При $B=6$ и $m=24$ получаем $u=3$ и $A=2$. Этот случай реализуется, например, если в школе № 1 писали тест 26 учащихся, 13 из них набрали по 1 баллу, а 13 — по 3 баллов, в школе № 2 писали тест 24 учащихся и каждый набрал по 6 баллов, а у перешедшего из одной школы в другую учащегося 3 балла.

Ответ: а) да; б) нет; в) б.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

VII. Система оценивания письменной экзаменационной работы по математике

Оценивание правильности выполнения заданий, предусматривающих краткий ответ, осуществляется сравнением ответа, приведенного в работе, с эталонным. Правильное выполнение каждого из заданий 1–11 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Проверка выполнения заданий 12–18 проводится экспертами на основе разработанной системы критериев оценивания. Полное правильное решение каждого из заданий 12, 14 и 15 оценивается 2 баллами; каждого из заданий 13 и 16 – 3 баллами; каждого из заданий 17 и 18 – 4 баллами.

Система оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом основывается на следующих принципах:

1. Возможны различные способы и записи развёрнутого решения. Главное требование – решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивается продвижение выпускника в решении задачи, а не недочёты по сравнению с «эталонным» решением. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

2. При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования. Тексты заданий экзаменационной работы в целом соответствуют формулировкам, принятым в учебниках, включённых в федеральный перечень учебников, допущенных Минпросвещения России к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ основного общего и среднего общего образования.

Максимальный первичный балл за выполнение экзаменационной работы – 31.

На основе результатов выполнения всех заданий работы определяются первичные баллы, которые затем переводятся в тестовые по 100-балльной шкале.